Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **3** (2011) 63–74

УДК 519.6

О двух конечномерных аппроксимациях периодической краевой задачи

Демьянков Н.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: praetoriax@gmail.com

получена 1 марта 2011

Ключевые слова: численные методы, краевая задача, периодическое решение, дискретный вариант

Рассматриваются два численных метода решения периодической краевой задачи: метод Галёркина и метод ломаных. Исходной проблеме сопоставляется последовательность её дискретизаций – систем уравнений в конечномерных пространствах. Приводятся условия, при выполнении которых существование решений периодической краевой задачи влечёт за собой разрешимость её дискретных вариантов. Исследуется вопрос о сходимости последовательности приближённых решений.

В работе рассматриваются два численных метода решения периодической краевой задачи: метод Галёркина и метод ломаных. Её основу составляют идеи и методы нелинейного анализа [1] – [6]. Принципиально важным для автора оказался подход к конечно-разностным методам исследования периодической краевой задачи, предложенный в [7]. В ряде мест применяются результаты из [8] – [10].

Приняты обозначения: $\|x; X\|$ – норма элемента x в B-пространстве $X; X^*$ – сопряженное к X пространство; (x, x^*) – значение функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X; \sigma(X, X^*)$, $\sigma(X^*, X)$ – слабые топологии на X и X^*, порождаемые билинейной формой $(\cdot, \cdot)$; $N(X)$ – сильная топология в X; $\Gamma(X)$ – множество конечномерных подпространств X; $d_X(z, M) = \inf\{\|z - y; X\|; y \in M\}$ – расстояние от элемента $z \in X$ до множества $M \subset X$; $\Theta_X(M_1, M_2) = \sup\{d_X(u, M_2),\, u \in M_1\}$ – уклонение множества $M_1 \subset X$ от множества $M_2 \subset X$, $L^p(\omega, X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ – пространство измеримых по Лебегу–Бохнеру на отрезке $\omega = [0, l]\,(0 < l < \infty)$ функций со значениями в B-пространстве X; норма в $L^p(\omega, X)$ определяется стандартным образом; как обычно, совпадающие п.в. (почти всюду) относительно одномерной меры Лебега mes_1 функции отождествляются. Все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; $\mathbb{R}^d$ – арифметическое d-мерное пространство, $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$ из $\mathbb{R}^d$. Отображение $F\colon X \to Y \quad (X, Y$ – банаховы пространства) назовем ограниченным, если для каждого ограниченного множества

$\mathscr{D} \subset X$ область значений $F(\mathscr{D})$ есть ограниченное подмножество Y. Отображение $F\colon X \to X^*$ строго монотонно, если

$$(u - v, F(u) - F(v)) > 0 \text{ для всех } u, v \text{ из } X, \ u \neq v.$$

1. Дискретные аппроксимации операторного уравнения. В пределах этого пункта V – сепарабельное бесконечномерное рефлексивное банахово пространство, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы в пространствах V и V^* соответственно. Обозначим через $S(V)$ совокупность ограниченных отображений $F\colon V \to V^*$, усиленно замкнутых в следующем смысле: для произвольных последовательностей $v_n \in V, v_n^* = F(v_n)$, обладающих свойствами

$$v_n \to v \text{ в } \sigma(V, V^*), \quad v_n^* \to v^* \text{ в } \sigma(V^*, V), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(v_n, v_n^*) \leq (v, v^*) \tag{1}$$

имеют место сходимость $v_n \to v$ в $N(V)$ и равенство $v^* = F(v)$. Близкие классы отображений рассматривались многими авторами (см., например, [2]-[4],[6] и приведённую там библиографию).

Элемент $x \in V$ назовём особой точкой отображения (поля) F класса $S(V)$, если

$$F(x) = 0. \tag{2}$$

Поле F невырождено на множестве $M \subset V$, если M не содержит особых точек F. Множество $\mathscr{N}$, все точки которого являются особыми для F, назовём особым. Пересечение множества $\mathscr{N}$ всех особых точек поля F с каждым шаром $B_V(x_0, R) = \{x \in V, \|x - x_0\| \leq R\}$ компактно [8].

Предложение 1.[9]. *Пусть поле F класса $S(V)$ невырождено на ограниченном замкнутом множестве $M \subset V$. Тогда существуют пространство E класса $\Gamma(V)$ и ограниченное непрерывное однозначное отображение $w\colon M \to E$ такие, что $(x - w(x), F(x)) > 0 \quad (x \in M)$.*

Пусть U – ограниченное открытое подмножество V с границей ∂U. Если поле F класса $S(V)$ невырождено на ∂U, то согласно предложению 1 существуют пространство E класса $\Gamma(V)$ и непрерывное отображение $w\colon \partial U \to E$ такие, что

$$(x - w(x), F(x)) > 0 \quad (x \in \partial U)\,. \tag{3}$$

В частности, векторное поле $\Phi(x) = x - w(x)$ невырождено на ∂U, и определено вращение $\gamma(\Phi, U)$ на ∂U . Это вращение не зависит от произвола в способе выбора пространства E и непрерывного поля $w\colon \partial U \to E$, удовлетворяющих условию острого угла (3).Число $\gamma(\Phi, U)$ обозначается символом $\gamma(F, U)$ и называется вращением поля F на границе ∂U. Обсуждение свойств вращения векторных полей класса $S(V)$ можно найти в [2], [4], [6]; здесь же приведём лишь формулировки используемых далее результатов.

Предложение 2. *Пусть U – ограниченное открытое подмножество пространства V и поле F класса $S(V)$ невырождено на ∂U. Тогда*

1) если $(v - v_0, F(v)) \geq 0 \quad (v \in \partial U,)$ для некоторого v_0 из U, то $\gamma(F, U) = 1$ (свойство нормировки);

2) если $\gamma(F,U) \neq 0$, то уравнение (2) имеет принадлежащее множеству U решение (принцип ненулевого вращения);

3) если $F_0, F_1 \in S(V)$ и $0 \neq (1-\lambda)\mathscr{F}_0(v) + \lambda F(v) \quad \forall\lambda \in [0,1], v \in \partial U$, то $\gamma(F_0,U) = \gamma(F_1,U)$ (инвариантность вращения относительно линейных гомотопий);

4) если $U_R = \{v \in V, \|v\| < R\}$ – открытый шар положительного радиуса R и поле F нечётно на сфере $\partial U_R \quad (F(-v) = -F(v) \forall v \in \partial U_R)$, то $\gamma(F,U_R)$ – нечётное число (теорема об антиподах).

Перейдём к рассмотрению метода Галёркина. Пусть H – конечномерное подпространство V, наделённое структурой евклидова пространства, $j_H\colon H \to V$ – оператор вложения, $j_H^*\colon V^* \to H^* = H$ – сопряжённый к нему оператор. Отображению F класса $S(V)$ сопоставим ограниченное и непрерывное отображение $F_H = j_H^* F j_H\colon H \to H$, а уравнению (2) – конечномерное операторное уравнение

$$F_H(x) = 0. \tag{4}$$

Элемент x из H есть решение уравнения (4), если $(v, F(x)) = 0\, \forall v \in H$.

Если U – ограниченная область в пространстве V и F невырождено на ∂U, то согласно предложению 1 существует такое пространство $H_0 \in \Gamma(V)$, что для любого $H \in \Gamma(V), H \supset H_0$ отображение F_H невырождено на $H \cap \partial U$, и вращение $\gamma(F_H, H \cap U)$ непрерывного векторного поля F_H одинаково для всех таких пространств

$$\gamma(\mathscr{F}_H, H \cap U) = \gamma(\mathscr{F}, U) \quad (H \in \Gamma(V), H \supset H_0). \tag{5}$$

Последовательность $V_n (n = 1, 3, \ldots)$ класса $\Gamma(V)$ назовём полной в пространстве V, если $d_V(x, V_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого элемента x из V. Отметим, что в качестве пространства H_0, фигурирующего в (5), можно взять пространство V_n при $n > n_0$, где n_0 – достаточно большое натуральное число [2], [9]. Не оговаривая каждый раз особо, считаем в пределах этого пункта, что $F \in S(V)$, а последовательность V_n – полна в пространстве V. Для упрощения записи положим $j_n = j_{V_n}$, $j_n^* = j_{V_n}^*$, $F_n = j_n^* F j_n\, (n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1. *Пусть U – ограниченное открытое подмножество пространства V, отображение F невырождено на ∂U и*

$$\gamma(\mathscr{F}, U) \neq 0\,. \tag{6}$$

Тогда найдётся такое натуральное число n_0, что при $n > n_0$ множество X_n решений уравнения $F_n(x) = 0 \quad (x \in V_n)$ непусто и

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_V(X_n, X_0) = 0, \tag{7}$$

где X_0 – множество решений уравнения (2); непустота множества X_0 вытекает из (6) и принципа ненулевого вращения.

Доказательство. При достаточно больших $n \quad (n > n_0)$ справедливо вытекающее из (5) с $H = V_n$ равенство $\gamma(F_n, V_n \cap U) = \gamma(F, U)$. Согласно принципу ненулевого вращения множества X_n, X_0 непусты. Множество X_0 есть компакт в пространстве

V и $X_0 \cap \partial U = \emptyset$. Поэтому число $dist(X_0, \partial U) = \inf\{\|x-u\|,\ x \in X_0,\ u \in \partial U\}$ положительно. Пусть $cl(U) = U \cup \partial U$ – замыкание области U. Если $0 < \varepsilon < dist(X_0, \partial U)$, то множество $U_\varepsilon = \{z \in V, d_V(z, X_0) < \varepsilon\}$ есть окрестность множества X_0, а множество $M(\varepsilon) = cl(U) \setminus U_\varepsilon$ замкнуто и не содержит особых точек отображения F. Найдётся такое число $n(\varepsilon)$, что все векторные поля F_n будут невырождены на M_ε. Действительно, в противном случае множество M_ε содержало бы особые точки поля F. Следовательно, $X_n \subset U_\varepsilon \quad (n > n(\varepsilon)$, поэтому $\Theta_V(X_n, X_0) \le \varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$. Последнее неравенство влечёт за собой соотношение (7). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь последовательность уравнений вида

$$j_n^* G_n(x) = 0, \tag{8}$$

где $G_n\colon V_n \to V^* \quad (n = 1, 2, \dots)$ – последовательность отображений, удовлетворяющая условиям:

g1) справедлива оценка

$$\|G_n(x)\|_* \le \Psi(\|x\|) \quad (x \in V_n), \tag{9}$$

в которой $\Psi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ – возрастающая функция, не зависящая от n;

g2) отображения $j_n^* G_n\colon V_n \to V_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ непрерывны;

g3) если $v_n \in V_n$, $v_n^* = G_n(v_n)$ и последовательности $v_n, v_n^* \quad (n = 1, 2, \dots)$ обладают свойствами (1), то последовательность v_n сходится к v в $N(V)$ и $v^* = F(v)$.

Наиболее сложным для проверки является условие g3). Оно означает, что последовательность отображений G_n в определённом смысле аппроксимирует отображение F.

Лемма 1. *Пусть* $x_n \in V_n, x_n^* = F(x_n), y_n^* = G_n(x_n), \lambda_n \in [0,1]$*, причём*

$$x_n \to x \text{ в } \sigma(V, V^*), \quad x_n^* \to x^* \text{в } \sigma(V^*, V), \quad y_n^* \to y^* \text{ в } \sigma(V^*, V), \quad \lambda_n \to \lambda, \tag{10}$$

$$(v, (1-\lambda_n)x_n^* + \lambda_n y_n^*) = 0 \quad \forall v \in V_n. \tag{11}$$

Тогда последовательность x_n *сходится к* x *в* $N(V)$ *и* $F(x) = 0$.

Доказательство. Фиксируем последовательность $v_n \in V_n$, сильно сходящуюся к элементу x. При любом n элемент $x_n - v_n$ принадлежит V_n, поэтому из (11) вытекает соотношение

$$(1-\lambda_n)(x_n - v_n, x_n^*) + \lambda_n(x_n - v_n, y_n^*) = 0. \tag{12}$$

Не нарушая общности, можно считать, что существуют конечные пределы

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - v_n, x_n^*) = c_0, \qquad \lim_{n\to\infty} (x_n - v_n, y_n^*) = c_1.$$

Переходя в (11), (12) к пределу, получаем равенство $(1-\lambda)c_0 + \lambda c_1 = 0$, в частности, $\min\{c_0, c_1\} \le 0$.

Если $c_0 \le 0$, то имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n - x, x_n^*) = \lim_{n\to\infty} (x_n - v_n, x_n^*) = c_0 \le 0\,.$$

Так как $\mathscr{F} \in S(V)$, то $x_n \to x$ в $N(V)$ и $x^* = F(x)$. Поскольку $x_n \to x$ в $N(V)$, то $(x_n, y_n^*) \to (x, y^*)$ при $n \to \infty$. В силу условия g3) отсюда следует равенство $y^* = F(x)$. Из (11) легко выводится, что $(1-\lambda)x^* + \lambda y^* = 0$, поэтому $0 = \mathscr{F}(x)$.

Осталось рассмотреть случай $c_1 \le 0$. В этой ситуации справедливы соотношения

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n - x, y_n^*) = \lim_{n\to\infty}(x_n - v_n, y_n^*) = c_1 \le 0\,,$$

из которых, согласно условию g3), вытекает сходимость $x_n \to x$ в $N(V)$ и включение $y^* \in F(x)$. Но тогда $c_0 = 0$, и мы возвращаемся к уже рассмотренному случаю. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть отображение F невырождено на ограниченном замкнутом множестве $M \subset V$. Тогда существует такое натуральное число n_0, что при $n > n_0$ и любом λ из отрезка $[0,1]$ векторное поле $(1-\lambda)F_n + \lambda j_n^* G_n$ невырождено на $V_n \cap M$.*

Доказательство. В предположении противного существует бесконечное множество $\mathbb{N}_0$ таких натуральных чисел n, что для n из $\mathbb{N}_0$ найдутся элементы $x_n \in V_n \cap M$, $\lambda_n \in [0,1]$, для которых выполнены соотношения (11). Не нарушая общности, можно считать, что имеют место сходимости (10). В силу леммы 1 имеем $x_n \to x$ в $N(V)$ и $F(x) = 0$. Но это означает, что элемент x принадлежит M и является особой точкой поля F. Полученное противоречие влечёт за собой доказываемое утверждение.

Лемма 3. *Пусть U – ограниченная область в пространстве V и поле $\mathscr{F}$ невырождено на ∂U. Тогда существует такое натуральное число n_0, что при $n > n_0$ векторное поле $j_n^* G_n \colon V_n \to V_n$ невырождено на $V_n \cap U$ и*

$$\gamma(j_n^* \mathscr{G}_n, V_n \cap U) = \gamma(\mathscr{F}, U)\,. \tag{13}$$

Доказательство. В силу леммы 2, относящейся к случаю $M = \partial U$, векторные поля $F_n, j_n^* G_n$ невырождены и линейно гомотопны на $V_n \cap \partial U$ при $n > n_0$. Теперь требуемый результат вытекает из инвариантности вращения относительно линейных гомотопий. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при достаточно больших n множество Y_n решений уравнения (8) непусто и*

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_V(Y_n, X_0) = 0\,. \tag{14}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Нужно лишь вместо равенства (5) для $H = V_n$ использовать равенство (13).

2. Метод Галёркина для периодической краевой задачи. Пусть $E = \mathbb{R}^d$, $E_1 = \mathbb{R}^{d_1}$ – арифметические линейные пространства размерностей d и d_1 соответственно, $\omega = [0,l] \quad (0 < l < \infty), 1 < p < \infty, q = \dfrac{p}{p-1}$. Обозначим через $\mathscr{A}_p(\omega, E_1, E)$ совокупность отображений $A \colon \omega \times E_1 \times E \to E$, удовлетворяющих условиям:

Ia) для каждого $t \in \omega$ отображение $A(t,\cdot,\cdot) \colon E_1 \times E \to E$ непрерывно, для каждого $(\eta,\xi) \in E_1 \times E$ отображение $A(\cdot,\eta,\xi) \colon \omega \to E$ измеримо;

IIa) при любых (t, η) из $\omega \times E_1$ отображение $A(t, \eta, \cdot)\colon E \to E$ строго монотонно;

IIIa) имеют место неравенства

$$|\xi^*|^q \le k_o|\xi|^p + r_0(t), \qquad \xi * \xi^* \ge k_1|\xi|^p - r_1(t),$$

в которых $\xi^* = A(t, \eta, \xi) \quad (t \in \omega, \eta \in E_1, |\eta| < R_0, \xi \in E)$, положительные постоянные k_0, k_1 и суммируемые функции r_0, r_1 могут зависеть от R_0.

Условие Ia) гарантирует суперпозиционную измеримость отображения A: если $\zeta\colon \omega \to E_1 \times E$ – измеримое и почти везде конечное отображение, то отображение $t \to A(t, \zeta(t))$ измеримо. Краткости ради полагаем далее $L^p = L^p(\omega, E), L^q = L^q(\omega, E)$; через C обозначается пространство $C(\omega, E_1)$ непрерывных на отрезке ω вектор-функций со значениями в пространстве E_1, норма в пространстве C вводится стандартным образом.

Лемма 4. *Пусть* $A \in \mathscr{A}_p(\omega, E_1, E), \quad \xi_n \in L^p,\ \eta_n \in C,\ a_n(t) = A(t, \eta_n(t), \xi_n(t))$ *и* $\xi_n \to \xi$ *в* $\sigma(L^p, L^q), \eta_n \to \eta$ *в* $N(C)$, $a_n \to a$ *в* $\sigma(L^q, L^p)$ *при* $n \to \infty$, *причём*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_\omega \xi_n \cdot a_n\, dt \le \int\limits_\omega \xi \cdot a\, dt\,. \tag{15}$$

Тогда $\xi_n \to \xi$ в $N(L^p)$, и $a(t) = A(t, \eta(t), \xi(t))$ п.в.

Доказательство. Поскольку последовательность η_n сходится в $N(C)$, то найдётся такое число R_0, что $|\eta_n(t)| < R_0 \quad (n = 1, 2, \dots)$. Очевидно, что $\eta_n \to \eta$ в $N(L^{p_0})$ при любом p_0 из $[1, \infty]$. Теперь доказываемое утверждение вытекает из леммы 2 работы [10].

Обозначим через $\mathscr{B}_p(\omega, E_1, E)$ совокупность отображений $B\colon \omega \times E_1 \times E \to Kv(E_1)$, удовлетворяющих условиям:

Iб) при любом (η, ξ) из $E_1 \times E$ отображение $B(\cdot, \eta, \xi)\colon \omega \to Kv(E_1)$ измеримо, а почти при всех t из ω отображение $B(t, \cdot, \cdot)\colon E_1 \times E \to E_1$ непрерывно;

IIб) справедлива оценка $|\eta^*| \le k_0|\xi|^p + r_0(t)$, в которой $\eta^* = B(t, \eta, \xi)\,(t \in \omega, \eta \in E_1, |\eta| < R_0, \xi \in E)$, число k_0 и суммируемая функция r_0 могут зависеть от R_0.

Лемма 5. *Пусть* $B \in \mathscr{B}_p(\omega, E_1, E)$, $\xi_n \in L^p, \eta_n \in C$, $b_n(t) = B(t, \eta_n(t), \xi_n(t))$. *Пусть* $\eta_n \to \eta$ *в* $N(C)$ *при* $n \to \infty$, *а последовательность* Λ_n *линейных функционалов на пространстве* C, *определяемая равенством*

$$\Lambda_n(v) = \int\limits_\omega b_n \cdot v\, dt, \tag{16}$$

сходится в $\sigma(C^*, C)$ *к некоторому линейному функционалу* $\Lambda\colon C \to \mathbb{R}$. *Тогда*

1) $\Lambda_n(\eta_n) \to \Lambda(\eta)$ *при* $n \to \infty$;

2) если же дополнительно $\xi_n \to \xi$ *в* $N(L^p)$, *то последовательность* b_n *сходится в топологии* $\sigma(L^1, L^\infty)$ *к элементу* $b \in L^1(\omega, E_1)$ *и*

$$\Lambda(v) = \int\limits_\omega b \cdot v\, dt, \qquad b(t) = B(t, \eta(t), \xi(t)) \quad \text{п.в.}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно. Второе утверждение леммы вытекает из непрерывности в пространствах Лебега оператора суперпозиции, порождаемого функцией B.

Перейдем к определению отображения, действующего в пространстве Соболева. Обозначим через V замыкание в метрике, порождаемой нормой

$$\|x\| = \|x; L^p\| + \|x'; L^p\|, \tag{17}$$

множества бесконечно дифференцируемых и $l-$периодических функций $x\colon \mathbb{R} \to E$. Пространство V с нормой (17) рефлексивно и сепарабельно; оно компактно вложено в пространство $\hat{C}$ непрерывных на отрезке ω функций $x\colon \omega \to E$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям $x(0) = x(l)$.

Пусть $A \in \mathscr{A}_p(\omega, E, E)$, $B \in \mathscr{B}_p(\omega, E, E)$. Сопоставим элементу x из пространства V линейный функционал $x^* = F(x) \in V^*$, допускающий представление

$$(v, x^*) = \int_\omega (v' \cdot a + v \cdot b)\, dt \qquad (v \in V),$$

в котором $a(t) = A(t, x(t), x'(t))$, $b(t) = B(t, x(t), x'(t))$ соответственно. Как нетрудно видеть, определяемое таким образом отображение $F\colon V \to V^*$ ограничено. Определение отображения F можно записать символически в виде

$$F(x) = -(A(t, x, x'))' + B(t, x, x'). \tag{18}$$

Теорема 3. *Если $A \in \mathscr{A}_p(\omega, E, E)$, $B \in \mathscr{B}_p(\omega, E, E)$, то определяемое равенством (18) отображение $F\colon V \to V^*$ принадлежит классу $S(V)$.*

Доказательство. Достаточно проверить усиленную замкнутость отображения F. Пусть $v_n \in V, v_n^* = F(v_n)$ и имеют место соотношения (1). Сходимость $v_n \to v$ в $\sigma(V, V^*)$ влечёт за собой сходимость $v_n \to v$ в $N(C)$. Поскольку $v_n^* = F(v_n)$, то справедливо равенство

$$(u, v_n^*) = \int_\omega (u' \cdot a_n + u \cdot b_n)\, dt\,, \tag{19}$$

в котором u – произвольный элемент пространства V, функции a_n, b_n определены равенствами: $a_n(t) = A(t, v_n(t), v_n'(t))$, $b_n(t) = B(t, v_n(t), v_n'(t))$. Последовательности $a_n, \xi_n = v_n'$ ограничены в пространствах L^p, L^q, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $a_n \to a$ в $\sigma(L^q, L^p)$, $\xi_n \to \xi$ в $\sigma(L^p, L^q)$. Последовательность b_n удовлетворяет оценке $|b_n(t)| \le k_0 |\xi_n(t)|^p + r_0(t)$, где положительная постоянная k_0 и суммируемая функция r_0 не зависят от n. Без ограничения общности, можно считать, что определяемая равенством (16) последовательность линейных функционалов Λ_n сходится в топологии $\sigma(C^*, C)$ к некоторому линейному функционалу $\Lambda\colon C \to \mathbb{R}$. Переходя в (19) к пределу, получаем равенство

$$(u, v^*) = \int_\omega u' \cdot a\, dt + \Lambda(u) \tag{20}$$

для произвольной функции u из V.

Равенство (19) справедливо и для $u = v_n$. Это приводит к соотношению

$$(v_n, v_n^*) = \int\limits_{\omega} (v_n' \cdot a_n + v_n \cdot b_n)\, dt\,.$$

Аналогично, если в (20) положить $u = v$, то получим

$$(v, v^*) = \int\limits_{\omega} v' \cdot a\, dt + \Lambda(v)\,.$$

Поскольку $\Lambda_n \to \Lambda$ в $\sigma(C^*, C)$, а $v_n \to v$, то $\Lambda_n(v_n) \to \Lambda(v)$ при $n \to \infty$. Объединяя полученные соотношения с (1), приходим к неравенству (15), в котором $\xi_n(t) = v_n'(t), \xi(t) = v'(t), \eta_n(t) = v_n(t), \eta(t) = v(t)$. В силу леммы 4 последовательность v_n' сходится к v' в $N(L^p)$ и $a(t) = A(t, v(t), v'(t))$ п.в. Согласно лемме 5 последовательность b_n сходится в топологии $N(L^1)$ к функции b и $b(t) = B(t, v(t), v'(t))$ п. в. Отсюда вытекает равенство $v^* = \mathscr{F}(v)$. Теорема доказана.

Приведём условия сходимости метода Галёркина для периодической краевой задачи

$$0 \in -(A(t, x, x'))' + B(t, x, x'), \qquad x(0) = x(l). \tag{21}$$

Под решением задачи (21) понимается решение уравнения (2), в котором отображение $F\colon V \to V^*$ определено равенством (18). Пусть V_n – полная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств. Как и в предшествующем пункте, определяются последовательность F_n следов отображения F на пространстве V_n и приближения Галёркина к задаче (21).

Теорема 4. *Пусть U – ограниченное открытое подмножество V и $0 \in U$. Пусть отображения A, B принадлежат классам $\mathscr{A}_p(\omega, E, E), \mathscr{B}_p(\omega, E, E)$ соответственно, отображение $F\colon V \to V^*$ определено равенством (18), невырождено на ∂U и удовлетворяет условию острого угла: $(v, F(v)) \geq 0 \qquad (v \in \partial U)$.*

Тогда: 1) множество X_0 принадлежащих U решений задачи (21) непусто; 2) для любой полной в пространстве V последовательности конечномерных подпространств V_n непусто множество X_n принадлежащих $V_n \cap U$ решений уравнения $\mathscr{F}_n(x) = 0$, и справедливо равенство (7).

Доказательство. Условие острого угла влечёт за собой равенства $\gamma(F, U) = 1 = \gamma(F_n, V_n \cap U)$ (свойство нормировки вращения). Теперь требуемый результат вытекает из теоремы 1.

3. Метод ломаных. Пусть n – натуральное число, $h = l/n$, $t_i = ih\,(i = 0, 1, \dots, n)$, $\omega_k = [t_{k-1}, t_k)\,(k = 1, \dots, n-1), \omega_n = [t_{n-1}, t_n]$. Обозначим через V_n подпространство пространства V, состоящее из функций v, сужения которых на любой отрезок $[t_{k-1}, t_k]\,(k = 1, \dots, n)$ суть линейные функции. Очевидно, что $V_n \in \Gamma(V)$ и последовательность $V_n \quad (n = 1, 2, \dots)$ полна в пространстве V. В пространстве V_n наряду с нормой $\|\cdot\|$, индуцированной из пространства V, можно ввести структуру евклидова пространства и евклидову норму $|\cdot|$. Естественным образом определяются операторы вложения $j_n\colon V_n \to V$ и сопряжённые к ним $j_n^*\colon V^* \to V_n^* = V_n$. Для м-отображения F, определяемого равенством (18), можно ввести приближения Галёркина $F_n = j_n^* F j_n \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Определим конечно-разностную аппроксимацию отображения F, соответствующую равномерному разбиению $\{\omega_k\}_1^n$ отрезка ω. Обозначим через 1_{ω_k} индикатор (характеристическую функцию) промежутка ω_k. Введём в рассмотрение линейный оператор $Q_n \colon V_n \to L^\infty$ и скалярную функцию $\varphi_n \colon \omega \to \omega$, полагая

$$(Q_n v)(t) = \sum_{k=1}^{n} v(t_{k-1}) 1_{\omega_k}(t), \qquad \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} t_{k-1} 1_{\omega_k}(t)\,.$$

При $t \in \omega_{k-1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$ справедливы равенства:

$$A(\varphi_n(t), (Q_n v)(t), v'(t)) = A\left(t_k, x(t_k), \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}\right),$$

$$B(\varphi_n(t), (Q_n v)(t), v'(t)) = B\left(t_k, x(t_k), \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}\right).$$

Сопоставим элементу v из V_n функционал $v^* = G_n(v) \in V^*$, допускающий представление

$$(u, v^*) = \int\limits_{\omega} (u' \cdot a + Q_n u \cdot b)\, dt, \qquad (u \in V),$$

где вектор-функции $a \colon \omega \to E, b \colon \omega \to E$ определены равенствами

$$a(t) = A(\varphi_n(t), (Q_n v)(t), v'(t)), \quad b(t) = B(\varphi_n(t), (Q_n v)(t), v'(t)). \tag{22}$$

При определённых преположениях последовательность отображений $G_n\,(n = 1, 2, \dots)$ удовлетворяет условиям g1) – g3). Оценка вида (9) без труда следует из условий IIIa), IIб). При любом натуральном n отображение $j_n^* G_n \colon V_n \to V_n$ непрерывно – это следует из Ia) и Iб). Более сложной, чем для условий g1), g2), оказывается проверка условия g3). Заменим условия Ia), Iб), входящие в определения классов $\mathscr{A}_p, \mathscr{B}_p$, более жёсткими условиями:

IVa) отображение $A \colon \omega \times E \times E \to E$ непрерывно по совокупности переменных;

IIIб) отображение $B \colon \omega \times E \times E \to E$ непрерывно по совокупности переменных.

Класс отображений $A \colon \omega \times E \times E \to E$, удовлетворяющих условиям IIa) - IVa), обозначим через $\mathscr{A}_p(\omega, E, +)$. Через $\mathscr{B}_p(\omega, E, +)$ обозначим совокупность отображений $B \colon \omega \times E \times E \to E$, удовлетворяющих условиям IIб), IIIб). Справедлив следующий вариант леммы 4.

Лемма 6. *Пусть* $A \in \mathscr{A}_p(\omega, E, +)$,

$$\xi_n \in L^p, \quad \eta_n \in L^\infty, \quad a_n(t) = A(\varphi_n(t), \eta_n(t), \xi_n(t)) \quad (n = 1, 2, \dots)\,,$$

причём $\xi_n \to \xi$ *в* $\sigma(L^p, L^q), \eta_n \to \eta$ *в* $N(L^\infty)$, $a_n \to a$ *в* $\sigma(L^q, L^p)$ *и имеет место соотношение (15). Тогда справедливо заключение леммы 4.*

Доказательство. Основное различие между леммами 4, 6 заключается в замене последовательности η_n, сходящейся к η в $N(C)$, последовательностью (η_n, φ_n), сходящейся к $(\eta, \varphi) \quad (\varphi(t) = t)$ в $N(L^\infty)$. Переход от класса $\mathscr{A}_p(\omega, E, E)$ к более узкому классу $\mathscr{A}_p(\omega, E, +)$ позволяет учесть эту разницу. Остальные рассуждения, проведённые при доказательстве леммы 4, сохраняют силу, поэтому опускаются.

Теорема 5. *Пусть $A \in \mathscr{A}_p(\omega, E, +), B \in \mathscr{B}_p(\omega, E, +)$. Тогда последовательность отображений $G_n : V_n \in V^*$ удовлетворяет условиям g1) – g3).*

Доказательство. Проверим условие g3). Пусть $v_n \in V_n, v_n^* \in G_n(v_n), \eta_n = Q_n v_n$, $\xi_n = v_n'$ и последовательности $v_n, v_n^* \quad (n = 1, 2, \dots)$ обладают свойствами (1). Поскольку $v_n^* = G_n(v_n)$, то справедливо равенство

$$(u, v_n^*) = \int\limits_{\omega} (u' \cdot a_n + Q_n u \cdot b_n) dt, \tag{23}$$

в которых u – произвольный элемент из V, $a_n(t) = A(\varphi_n(t), \eta_n(t), \xi_n(t)), b_n = B(\varphi_n(t), \eta_n(t), \xi_n(t))$. Последовательности $a_n, \xi_n \quad (n = 1, 2, \dots)$ ограничены в пространствах L^q, L^p, поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $a_n \to a$ в $\sigma(L^q, L^p)$, $\xi_n \to \xi$ в $\sigma(L^p, L^q)$.

Сходимость $v_n \to v$ в $\sigma(V, V^*)$ влечёт за собой сходимости $v_n \to v$ в $N(C)$ и $\eta_n = Q_n v_n \to \eta = v$ в $N(L^\infty)$. Последовательность b_n ограничена в пространстве L^1. Отсюда следуют равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\omega} (Q_n v_n - v_n) \cdot b_n \, dt = \int\limits_{\omega} (Q_n v - v) \cdot b_n \, dt = 0.$$

Объединяя последние соотношения с (1) и повторяя рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 3, приходим к неравенству (15), в котором $\xi_n = v_n', \eta_n = Q_n v_n, \xi = v', \eta = v$. В силу леммы 6 $\xi_n \to \xi$ в $N(L^p)$. Так как $b_n(t) = B(\varphi_n(t), \eta_n(t), \xi_n(t))$ п.в., то $|b_n(t)| \le k_0 |\xi_n(t)|^p + r_0(t)$ п.в.; в этом неравенстве положительная постоянная k_0 и суммируемая функция r_0 не зависят от n. Данное неравенство и сходимость $\xi_n \to \xi$ в $N(L^p)$ влекут за собой сходимость последовательности b_n в топологии $N(L^1)$ к элементу $b(t) = B(t, v(t), v'(t))$ п.в. Отсюда следует включение $v^* = F(v)$. Теорема доказана.

Элемент x из V_n есть решение уравнения (8) в том и только в том случае, если для любого элемента u из V_n имеет место равенство

$$\int\limits_{\omega} (u' \cdot a + Q_n u \cdot b) \, dt = 0, \tag{24}$$

в котором $a(t) = A(\varphi_n(t), (Q_n x)(t), x'(t)), \quad b(t) = B(\varphi_n(t), (Q_n x)(t), x'(t))$. Функции $u', a, Q_n u, b$ постоянны на промежутках $\omega_k \quad (k = 1, \dots, n)$, поэтому интегральное тождество (24) эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} (u(t_{k+1} - u(t_k)) \cdot a(t_k) + \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) b(t_k) = 0 \,. \tag{25}$$

В (25) векторы $u(t_0), \dots, u(t_{n-1})$ – произвольные элементы из E, а $u(t_n) = u(t_0)$. Применяя к первому слагаемому в левой части (25) преобразование Абеля, получаем равенство

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(b(t_i)-\frac{a(t_i)-a(t_{i-1})}{h}\right)u(t_i)=0\,;$$

для единообразия записи здесь принято, что $a(t_{-1})=a(t_{n-1})$. Ввиду произвольности элементов $u(t_i)\quad(i=0,1,\ldots,n-1)$ последнее равенство эквивалентно системе n уравнений

$$b(t_i)=\frac{a(t_i)-a(t_{i-1})}{h}\qquad(i=0,1,\ldots,n-1). \tag{26}$$

Систему (26) можно рассматривать как расшифровку уравнения (8), соответствующую пространству V_n кусочно-линейных на отрезке $\omega=[0,l]$ вектор-функций.

Теорема 6. *Пусть отображение $F\colon V\to V^*$ определено равенством (18), $A\in\mathscr{A}_p(\omega,E,+), B\in\mathscr{B}(\omega,E,+)$, последовательность V_n определена так же, как и в теореме 5. Пусть при некотором положительном R выполнено условие $s_0)$: $F(v)\neq 0$ и $F(v)/\|F(v)\|\neq F(-v)/\|F(-v)\|$, в котором v – произвольный элемент сферы ∂U_R. Тогда 1) множество X_0 принадлежащих шару U_R решений уравнения (2) непусто; 2) при достаточно больших n множество Y_n принадлежащих шару U_R решений уравнения (8) непусто, и имеет место равенство (14).*

Доказательство. Из условия $s_0)$ и теоремы об антиподах вытекает нечётность вращения $\gamma(\mathscr{F},U_R)$. Теперь непустота множества X_0 следует из принципа ненулевого вращения. Второе утверждение теоремы вытекает из теорем 2, 5.

Количество иллюстративных примеров можно значительно увеличить за счёт применения иных способов вычисления вращения векторных полей (см., например, [1] – [6]). Перспективны приложения полученных выше утверждений к исследованию вариационных задач; здесь могут оказаться полезными результаты работ [6], [8] – [10] о потенциальных векторных полях.

В заключение хочется поблагодарить моего научного руководителя, Климова Владимира Степановича, за помощь в написании данной статьи.

Список литературы

1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенные решения операторных уравнений. М., 1969.

2. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М., 1990.

3. Похожаев С.И. О разрешимости нелинейных уравнений с нечётными операторами // Функц. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 3. С. 66 – 73.

4. Browder F.E. Nonlinear elliptic boundary problems and the generalized topological degree // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. № 5, P. 999 – 1005.

5. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.

6. Бобылёв Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. М., 1998.

7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.

8. Климов В.С., Сенчакова Н.В. Об относительном вращении многозначных потенциальных векторных полей // Матем. сб. 1991. Т. 192. № 1, С. 1393 - 1407.

9. Климов В.С. О топологических характеристиках негладких функционалов // Изв. РАН. Сер. мат. 1998. Т. 62. № 5. С. 117 – 134.

10. Климов В.С. Периодические решения параболических включений и метод усреднения // Диф. уравн. 2010. Т. 46. № 12. С. 1722 – 1730.

About Two Finite-Dimensional Approximations of the Periodic Boundary Value Problem

Demyankov N.A.

Keywords: numerical methods, boundary value problem, periodic solution, discrete version

Two numerical methods for solving the periodic boundary value problem are considered: Galerkin's method and the method of polygonal lines. The original problem is mapped to the sequence of its discretization – systems of equations in finite spaces. Conditions under which the existence of solutions of a periodic boundary value problem entails its solvability of discrete options are given. The question of approximate solutions convergence is studied.

Сведения об авторе:
Демьянков Николай Андреевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант кафедры математического анализа